조인준
KBS 기술연구소 차장

C군의 B급 잡설, High School Calculus Revisited

+ 조인준 KBS 기술연구소 차장

지난 '정수의 곱셈에 관한 억측'편 이후로 지금까지 잊고 지냈던 현학적 허세가 긴 잠복기를 깨고 겨드랑이에서 날개처럼 다시 돋기 시작함을 느꼈습니다. 간질거리는 이 불길한 느낌을 어찌해야 좋을지 순간적으로 당황스러울 뻔 했지만, 상처의 딱지가 거슬려서 자꾸 떼어내거나 여드름이 신경 쓰여 익기도 전에 미리 짜내면 결국 흉터만 커지고 마는 것을 수없이 경험했기에 차라리 허세에 몸을 맡기는 편이 나을지도 모른다는 생각이 문득 떠올랐습니다. 그 대단한 메뚜기들도 모두 한 철이라는데 C군의 가벼운 허세가 얼마나 대단하다고 남들이 눈살을 찌푸릴 정도로 질기고 질퍽하게 오래도록 가겠습니까? 욕먹을 때는 욕을 먹게 되더라도 허세의 필이 충만했을 때는 그 필에 장단을 맞추는 게 오히려 겸손을 가장한 오만보다는 자연스러운 일이라는 뻔뻔한 변명으로 또 하나의 '현학적 허세' 시리즈를 시작해보겠습니다. 자동차에 관한 잡스러운 이야기로 시작해놓고 무책임하게 산수로 주제를 널뛰기 하고 있는 점에 대해서는 굉장히 죄송스럽지만, 혈관 깊은 곳에서 끓어오르는 수학에 관한 순수한 열정이 본 연재에 관한 명분과 약속을 모두 초월하도록 C군을 떠밀고 있습니다. 다른 것은 모르겠지만 본 편 'High School Calculus Revisited'는 여러분의 시간이 아깝지 않은 역작으로 남겨보겠습니다. 또한, 여러분 자녀들의 수학교육에 있어 유익한 내용이 되도록 혼신의 힘으로 허세를 떨쳐보겠습니다.

지난 편에서 C군은 용감하게도 중학교 수학(C군은 우리나라 교과과정의 수학을 수학이라 쓰고 산수라 읽고 싶습니다.)의 초기 과정인 '정수의 곱셈'에 관한 근거 없는 추측을 남발하였습니다. 아무런 공인된 자료를 제시하지 못한 채 그저 막연한 추측으로 일관한 내용이었지만 한 번 제대로 차오른 C군의 필(feel)은 좀처럼 가라앉기를 포기한 채 조금 더 대담하고 무책임한 방향으로 묵묵히 한 발을 더 내딛기로 작심을 해버린 듯합니다. 한 감성하는 C군이 이 느낌에서 헤어나지 못할 것은 자명한 일이고 그래서 이번 호는 고등학교 산수의 꽃 '미적분'을 걸고넘어지는 것을 목표로 삼았습니다.

아마 이 글을 읽고 계신 모든 독자 여러분에게 아래의 표현은 매우 익숙할 것으로 생각합니다.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad \textit{where} \quad f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

딱 봐도 미분은 어느 함수의 임의의 점에서의 변화율을 나타내는 것을 알 수 있습니다. 간단한 함수를 이용하여 아래와 같이 미분을 해보겠습니다.

$x = x^2$ 일 때

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \quad 2x$, 다시 말해서 $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$

우선, 이미 다 알고 계신 내용을 반복해서 죄송합니다. 하지만 누구나 다 알고 있고 충분히 이해하고 있어서 '현학적 허세'에 아무 도움이 되지 않는 내용을 지루하게 다시 반복한 것은 미분이 얼마나 쉽게 이해가 되는지 보여드리기 위함입니다. 아마 대부분의 고등학생들도 미분의 개념과 연산에 관해서 충분히 설명할 수 있을 거라 생각합니다. 누구나 미분을 이해하고 있다고 이렇게 이야기해버리면 당최 C군은 무슨 현학적 허세를 부려보겠다고 미적분을 들먹인 걸까요?

이미 계산이 빠른 독자 여러분께서는 충분히 눈치를 채셨겠지만 C군이 하고 싶은 이야기는 적분에 있습니다.

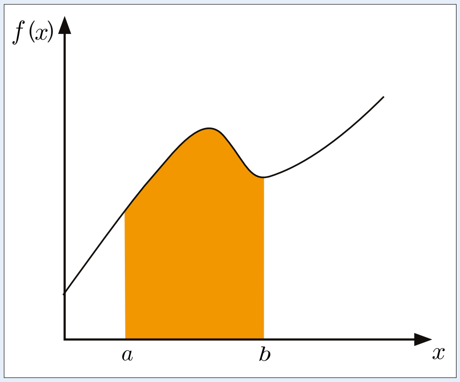

그림 1

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

그림 2

[그림 1]과 [그림 2]를 보는 순간 대한민국에서 고등학교를 졸업한 대부분의 사람들은 한 가지 등식과 그 등식의 풀이를 떠올릴 것입니다.

구간 a 부터 b 까지의 함수 $f(x)$ 와 x 축 사이 공간의 넓이 = $\int_a^b f(x)\,dx$

그리고

그 넓이는 $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ 라고 할 때 $F(b) - F(a)$

여기서 두 가지 질문을 하겠습니다.

[질문 1]

왜 $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 구간 a 부터 b 까지의 함수 $f(x)$와 x축 사이의 넓이가 되는가?

[질문 2]

왜 $\int_a^b f(x)\,dx$ 를 풀기 위해 $f(x)$ 에 미분의 역연산을 취한 후 $F(b) \quad F(a)$ 를 하는가?

[질문 1]에 대해서는 쉽게 대답할 수 있는 사람과 그렇지 못한 사람이 섞여 있을 것 같습니다. 두 사람의 차이는 dx 를 어떻게 이해하고 있는가에 달려있는 것 같습니다. C군의 경우 고교 시절 $\int$(적분기호)와 같이 나오는 dx 를 어떤 임의의 극소량(Infinitesimal Quantity)이라고 배운 기억이 없습니다. C군이 잘 못 기억하고 있는지 모르지만 dx 의 정체를 명확히 밝혀주신 선생님이 계시지 않았던 것 같습니다.

조인준
KBS 기술연구소 차장

dx 의 정체는 명확하지 않은 채 미분의 역연산을 취하는 적분의 연산만을 배우며 $\int$ 의 다음에 나오는 dx 는 마치 x 에 관해 적분을 하라는 일종의 수학기호 같은 인상만을 은연 중 받았던 것 같습니다. 현재 고교 수학시간에 dx 를 어떻게 설명하고 있는지 모르지만, 그리고 C군이 고교 시절 수학시간에 가졌던 개인적 경험이 대다수의 고교 수학수업과 일치할 거라고 판단할 근거는 아무것도 없지만 성급한 일반화가 주특기인 C군은 거침없고 근거 없는 지레짐작으로 많은 사람들이 dx를 x 에 관해 적분을 하라는 일종의 지시적 기호로 오해하고 있다고 속단을 내렸습니다. 그래서 다음의 진술이 여러분께는 매우 충격적인 사실이 될 거라 확신하며 심각하고 비장한 각오로 아래와 같이 힘주어 키보드를 난타해버립니다.

dx는 임의의 극소량이다 !

수학적으로 엄밀하게 기술할 능력이 부족한 관계로 에 관한 느낌적인 느낌을 전달하기 위해 [그림 3]을 참조하도록 하겠습니다.

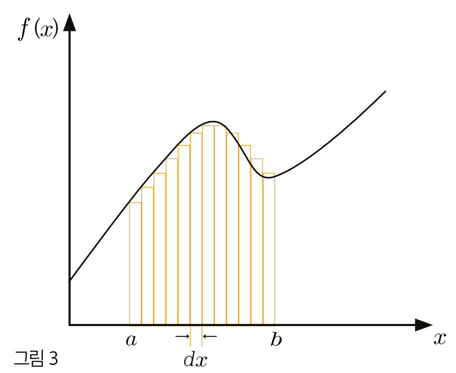

그림 3

dx 는 [그림 3]과 같이 x 축을 미소구간으로 잘게 나누었을 때 각 미소구간의 크기라고 생각하시면 크게 무리가 없을 것 같습니다. dx가 x 축 위의 임의의 미소구간의 크기라면 $f(x)\,dx$ 는 각 미소구간을 밑변으로 하고 그 구간에 해당하는 함수값 $f(x)$ 를 높이로 하는 사각형의 넓이가 됩니다. 이 사각형의 넓이를 $a \to b$ 구간에 걸쳐 모두 합산하는 것이 $\int_a^b f(x)\,dx$ 이므로 $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 구간 a 부터 b 까지의 함수 $f(x)$ 와 x 축 사이의 넓이가 됩니다. 이것이 [질문 1]에 대한 대답이며 별로 대단치 않은 내용입니다. “겨우 이런 하찮은 내용으로 폼을 잡으려고 그렇게 설레발을 친거야?”하며 혀를 차는 분들도 계실 것 같습니다. 하지만 오늘의 진짜 승부는 [질문 2]에 있습니다. 도대체 어떻게 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ $where\ \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 가 되는 걸까요? 적분을 계산하기 위해서 왜 미분의 역연산을 취하는지 나름 설득력 있게 설명할 수 있는 사람이 몇이나 될까요? 감히 C군이 오지랖 넓게 나서서 수십 년간 고교수학에서 말해주지 않았던 적분의 정체를 밝혀보겠습니다. (이미 알고 계신 분들께는 너무 나서서 죄송합니다. ^^;)

$\int_a^b f(x)\,dx$ 는 구간 a 부터 b 까지 dx 간격으로 $f(x)\,dx$ 를 모두 더하는 것입니다.

그러므로 아래와 같이 쓸 수 있을 것입니다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(b)\,dx + f(b-dx)\,dx + f(b-2dx)\,dx + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + f(a+2dx)\,dx + f(a+dx)\,dx + f(a)\,dx$$

수학적으로 엄밀하지는 않지만 느낌적인 증명을 위해 $\Delta x \to 0$ 일 때 $\Delta x = dx$ 정도로 단순화해 보겠습니다.

그러면 미분의 정의 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$ 를 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$

정도로 크게 무리 없이 다시 표현할 수 있을 것이고, $\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$ 에서 수학적으로 꽤 허술해 보이는 $F(x+dx)-F(x) = dF(x)$ 의 관계를 구할 수 있습니다. 사실 $dF(x)$ 라는 표시는 x 가 dx 만큼 변할 때 함수 $F(x)$ 의 변화량을 나타내는 것이므로 굳이 앞에서와 같은 전개가 필요 없이 $F(x+dx)-F(x) = dF(x)$ 라고 곧바로 써도 무방하지만 너무 급하게 건너뛰면 독자 여러분께 혼란을 드릴 것 같아 지루함을 참고, 뻔한 전개를 했습니다.

여기에 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 로부터 양변에 임의의 극소량 dx 를 곱하여 $dF(x) = f(x)\,dx$ 를 만들고 $F(x+dx)-F(x) = dF(x)$ 를 대입하면 $F(x+dx)-F(x) = f(x)\,dx$ 라는 여전히 뭔가 찜찜하게 허술한 관계를 유도할 수 있습니다. 하지만 이 허술해 는 $F(x+dx)-F(x) = f(x)\,dx$ 가 "왜 적분은 미분의 역연산을 하는가 ?"에 대한 중요한 실마리입니다.

다시 적분의 출발로 돌아가 보겠습니다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(b)\,dx + f(b-dx)\,dx + f(b-2dx)\,dx + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + f(a+2dx)dx + f(a+dx)\,dx + f(a)\,dx$$

위 식의 우변의 각 항을 $F(x+dx)-F(x) = f(x)\,dx$ 을 이용하여 다시 정리하기 위해 아래와 같이 하나 하나 정리해보겠습니다.

$$f(b)\,dx = F(b+dx)-F(b)$$
$$f(b-dx)\,dx = F(b)-F(b-dx)$$
$$f(b-2dx)dx = F(b-dx)-F(b-2dx)$$
$$\vdots$$
$$f(a+2dx)\,dx = F(a+3dx)-F(a+2dx)$$
$$f(a+dx)\,dx = F(a+2dx)-F(a+dx)$$
$$f(a)\,dx = F(a+dx)-F(a)$$

정리된 각 항을 적분식에 대입하면 다음과 같이 됩니다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b+dx) - F(b) + F(b) - F(b-dx) + F(b-dx) - F(b-2dx) + \cdots$$

$$\cdots + F(a+3dx) - F(a+2dx) + F(a+2dx) - F(a+dx) + F(a+dx) - F(a)$$

벌써 여기에서 감이 딱 오기 시작할 것 같습니다. 위 식의 우변을 관찰해보면 $F(b+dx)$ 와 $F(a)$ 를 제외한 모든 항들이 인접한 항들에 의해서 0으로 소거됩니다. 0으로 소거되는 항들을 정리하면 최종적으로 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b+dx) - F(a)$ 가 됩니다. 여기서 dx 는 극소량이므로 연속함수에서 $F(b+dx) = F(b)$ 가 되므로 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ 가 됩니다. 뭔가 매우 엄밀하지 못하고 허술한 전개이지만 적분이 미분의 역연산에 의해서 계산되는 부분에 대한 궁금증이 어느 정도는 느낌적으로 해소되었을 거라고 믿습니다.

P.S.
본 편의 내용 또한 수학적 엄밀함이 매우 부족한 채로 느낌적인 느낌을 통해 독자의 어렴풋한 감을 형성하는 것에 도움을 주고자 기획된 B급 미적분학 개론이었습니다. 너무 믿지는 마시고 억지 춘향 같은 부분은 자체적으로 검열하여 설득력 있는 부분만을 취하세요.