

전기 기본이론 (Basic Theories of Electrical Engineering) - III

3. 임피던스

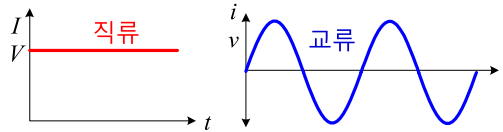
연재목록

1. 전류
2. 전기와 자기
3. 임피던스
4. 발전기
5. 전동기
6. 변압기
7. 전력
8. 접지
9. 전기안전
10. 노이즈
11. 무정전 전원설비

직류회로에서 전류를 제한하는 요소는 **저항** 하나뿐이다. 그러나 교류회로에서 전류를 제한하는 요소는 저항에 리액턴스가 추가된다. 리액턴스에는 코일(인덕턴스)에 의한 **유도성 리액턴스**와 콘덴서(정전용량)에 의한 **용량성 리액턴스**가 있다. **임피던스**는 저항과 리액턴스를 합해서 이르는 말이다.

직류와 교류

직류는 그림과 같이 전압 또는 전류의 크기가 시간에 대해 변화가 없이 일정한 것을 말하고, 교류는 시간이 지남에 따라 전압 또는 전류의 크기가 계속해서 변화해 가는 것을 말한다.



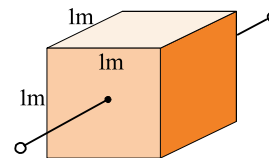
저항의 정의

저항은 전류가 흐르는 것을 방해하는 성질이다. 모든 물체는 대소의 차이는 있으나 전기저항을 가지고 있다. 전기저항이 매우 작은 물질을 **도체**라 하고, 저항이 매우 큰 물질을 **부도체** 또는 **절연체**라고 한다.

전기 저항은 마치 수도관 속에 녹이나 흙 또는 수세미 등이 들어가서 물이 흐르는 것을 방해하는 것과 유사하다. 저항은 옴(Ohm: Ω) 단위로 표시한다. 1[Ω]의 저항은 1[V]의 전압이 가해졌을 때 1[A]의 전류가 흐르는 저항의 크기로 정의된다.

고유저항

고유저항 또는 **저항률**이란 물질이 가지고 있는 고유한 저항특성을 말하는 것으로 [Ω·m] 단위로 표시한다. 1 [Ω·m]은 그림과 같이 가로, 세로 높이가 각각 1m인 정육면체의 양변에 도체 판을 대고 그 양단의 저항을 정확히 측정해서 구한 저항치를 말한다. 몇 가지 물질의 고유저항을 표시하면 다음과 같다.



물질(도체)	고유저항 ρ[Ω·m]	물질(부도체)	고유저항 ρ[Ω·m]
구리	1.72 x 10 ⁻⁸	유리	10 ⁹ ~ 10 ¹¹
알루미늄	2.75 x 10 ⁻⁸	자기	3 x 10 ¹¹
철	9.8 x 10 ⁻⁸	베이클라이트	10 ⁶ ~ 10 ¹⁰

저항의 크기는 다음식으로 계산한다.

$$\text{물질의 저항} = \text{저항률} \times \frac{\text{길이}}{\text{단면적}} \rightarrow R = \rho[\Omega \cdot m] \cdot \frac{\ell[m]}{A[m^2]} [\Omega]$$

즉, 물질의 저항은 길이에 비례하고 그 단면적에 반비례한다. 윗식에서 단면적의 단위가 [m²]로 되어 있는데 전선이나 케이블의 경우 단면적을 [mm²]를 사용하므로 윗식을 사용할 때 단면적 [mm²]를 [m²]로 환산해야 한다. 1[mm²]=10⁻⁶[m²]이므로 예를들어 구리(연동선)의 저항은

$$\begin{aligned} R &= \rho \cdot \frac{\ell[\text{m}]}{A[\text{m}^2]} = 1.72 \times 10^{-8} \times \frac{\ell[\text{m}]}{A[\text{mm}^2] \times 10^{-6}} = 1.72 \times 10^{-8} \times \frac{\ell[\text{m}] \times 10^6}{A[\text{mm}^2] \times 10^{-6} \times 10^6} \\ &= 1.72 \times 10^{-2} \times \frac{\ell[\text{m}]}{A[\text{mm}^2]} = \frac{1}{58} \cdot \frac{\ell[\text{m}]}{A[\text{mm}^2]} [\Omega] \end{aligned}$$

온도에 따른 저항의 변화

물질은 일반적으로 온도가 올라가면 저항이 커진다. 온도에 따른 저항의 크기 변화는 다음식으로 계산한다.

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha(T_2 - T_1)]$$

식에서 R₁은 초기 저항, R₂는 온도가 변화한 후의 저항, T₁은 초기온도, T₂는 온도가 변화한 후의 온도, α는 물질의 **저항온도계수**로 동선의 경우 α = 1/234.5이다. 예를들어 20℃에서 저항이 5Ω인 동선의 온도가 100℃로 되면 저항은

$$R_2 = 5 \times \left[1 + \frac{1}{234.5} (100 - 20) \right] = 6.7 \Omega$$

앞의 조건과 같은 조건에서 변화한 후의 온도 T₂가 -214.5℃ 인 경우의 저항을 계산해 본다.

$$R_2 = 5 \times \left[1 + \frac{1}{234.5} (-214.5 - 20) \right] = 0 \Omega$$

저항이 0[Ω]이 되었다는 것은 초전도체가 되었다는 것을 의미한다. 그러나 구리는 -214.5℃에서 초전도체가 되지 않는다. 이상의 결과로부터 위의 계산식은 극저온에서는 정확히 성립되지 않는다는 것을 알 수 있고, 또한 실제의 초전도체도 왜 영하 200℃ 정도 이하의 극저온에서 초전도성을 가지는지를 짐작해 볼 수 있다.

복소수

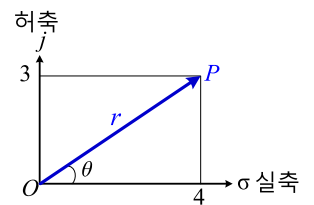
양수의 제곱은 양수, 음수의 제곱도 양수, 0의 제곱은 0이다. 즉, 어떤 실수도 그 제곱은 양수이다.

따라서 방정식 x² = -1의 해는 실수 범위에서는 구할 수가 없다. 그래서 제곱하면 -1이 되는 수를 생각해서 이를 문자 j로 표시한다.

즉, j² = -1 → j = √-1 로 정의하고 이때 j를 **허수단위**라고 한다.

복소수 4 + j3은 복소평면에 그림과 같이 표시할 수 있다. 그림에서 점 P의 위치는 직선 OP의 길이(복소수의 절대값) r 과 편각(∠θ)로도 표시할 수 있다. 직선 OP의 길이와 편각은 다음과 같이 계산된다.

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ$$

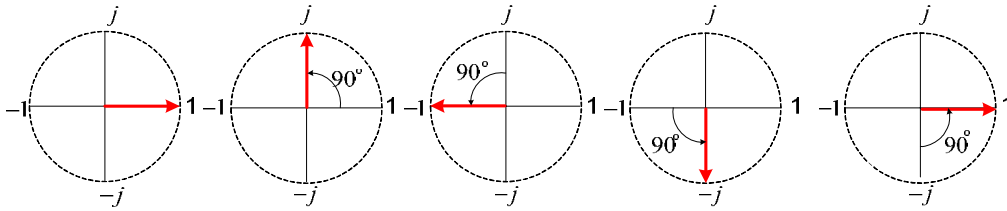


결국 복소수 4 + j3은 5∠36.87°라고도 표시할 수 있는데, 이와 같이 복소수를 절대값과 편각으로 표시한 것을 **극좌표 형식**이라고 한다. 극좌표 형식으로 표시된 복소수를 직각좌표 형식으로 바꾸려면 다음과 같이 계산하면 된다.

$$5 \angle 36.87^\circ = 5 \times (\cos 36.87^\circ + j \sin 36.87^\circ) = 4 + j3$$

전기공학에서 허수단위 j를 사용하는 것은 주로 각도 90°를 표시하기 위해서이다.

1 × j = j, j × j = j² = -1, j³ = -j, j⁴ = 1이기 때문에 다음 그림의 복소평면에서 j를 한번 곱할 때마다 벡터의 위상각이 반시계방향으로 (+방향으로) 90°씩 이동한다.



반대로 j 로 한번씩 나누어 줄 적마다 위상각은 시계방향으로 (-방향으로) 90° 씩 이동한다.

유도성 리액턴스가 전류를 제한하는 이유

그림과 같이 철심에 코일을 감은 것을 **리액터**라고 한다. 이 리액터 코일의 저항을 $R = 5[\Omega]$ 이라고 하고 코일 단자에 $V = 100V$ 의 직류전압을 가하면, 직류는 전류의 크기가 일정해서 변화가 없으니 패러데이의 전자유도법칙에서 $di/dt = d\Phi/dt = 0$ 가 되어 코일에 역기전력을 유기하지 않으므로, 옴의 법칙에 의해서

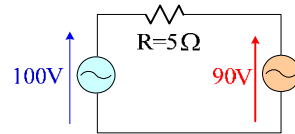
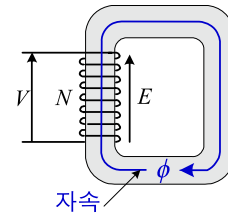
$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{5} = 20 [A]$$

의 전류가 흐른다. 그러나 코일에 교류전압을 가하면 이 전류가 자속을 만들어 철심 내를 그림과 같이 흐르고, 이 자속이 코일과 쇠교해서 패러데이의 전자유도법칙에 의해 코일에 **역기전력 E** 가 유기되어 실제로 흐르는 전류는 20A가 될 수 없다

예를들어 이때 발생하는 역기전력이 90[V]라고 하면 코일 저항 5Ω의 양단에는 그림과 같이 서로 반대방향으로 100V와 90V가 가해진 것과 같이 되어 실제로는 $100 - 90 = 10V$ 의 전압만 가해진 것으로 된다. 따라서 이때 흐르는 전류는

$$I = \frac{V - E}{Z} = \frac{100 - 90}{5} = 2 [A]$$

밖에 안되는 데 이것이 유도성 리액턴스가 전류를 제한하는 원리이다. 즉 유도성 리액턴스가 전류를 제한하는 이유는 패러데이의 전자유도법칙에 의한 **역기전력** 때문이다.



유도성 리액턴스와 임피던스

그림과 같은 리액터에 전압 $e = E_m \sin \omega t$ 가 가해지면 인가된 전압은 다음식으로 표시할 수 있다.

$$e = L \frac{di}{dt}$$

윗식의 양변을 적분하면

$$\int e dt = Li$$

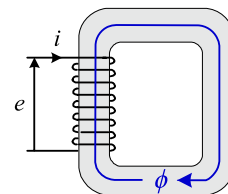
$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int e dt = \frac{1}{L} \int E_m \sin \omega t dt = -\frac{E_m}{\omega L} \cos \omega t \\ &= \frac{E_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ) = \frac{E_m}{\omega L} \sin \omega t \angle -90^\circ = \frac{e}{j\omega L} = \frac{e}{X_L} \end{aligned}$$

위에서 $\sin(\omega t - 90^\circ)$ 를 삼각함수의 가법정리로 전개하면 $-\cos \omega t$ 가 된다. 즉, $-\cos \omega t = \sin(\omega t - 90^\circ)$ 이다.

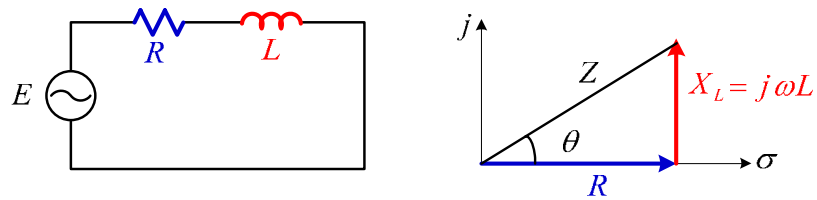
따라서 유도성 리액턴스는

$$X_L = j\omega L = j2\pi f L$$

로 표시된다. 즉, 주파수가 클수록 전류의 시간에 대한 변화율도 커지기 때문에 유도성 리액턴스의 크기는 각속도 ω (주파수 f)에 비



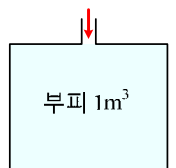
례하고 또한 인덕턴스 L의 크기에 비례한다. 이 식에서 j 가 붙은 이유는 다음 그림과 같은 회로의 저항과 리액턴스를 복소평면에 그리면 저항과 리액턴스가 90°의 각을 이루기 때문이다.



저항과 리액턴스를 합해서 기술하면 $Z = R + j\omega L = R + jX_L$ 로 표시되는 Z를 **임피던스**라고 한다.

공기통에 들어가는 공기량

용량성 리액턴스를 실감나게 이해하기 위해, 우선 공기통에 들어가는 공기량에 대해 생각해 본다. 공기 1[m³]의 무게는 1기압에서 1.2[kg]이고, **보일의 법칙**에 따라, 일정한 온도에서 체적은 압력에 반비례한다. 이 공기통에 1기압의 압력으로 공기를 넣으면 1.2[kg]이 들어갈 것이고, 밀어 넣는 압력을 2기압으로 올리면 체적이 반으로 감소해서 0.6[kg], 10기압의 압력으로 넣으면 0.12kg의 공기가 들어갈 것이다. 즉 공기통에 들어가는 공기의 양은 공기통의 크기 C[m³]와 가해진 압력 P[기압]에 비례해서, 들어간 공기의 양 Q[kg]는 다음과 같이 계산된다.



$$Q = CP \text{ [kg]}$$

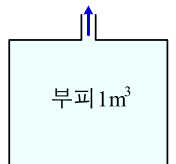
공기통에 공기가 들어가는 속도

공기통에 공기를 밀어 넣는 공기펌프의 압력을 1기압에서 1[기압/s]의 속도로 올리려면 공기통에는 1.2[kg/s]의 속도로 공기가 들어가서 9초 후에 공기통에는 12kg의 공기가 들어가 있을 것이다. 이때 공기가 들어간 속도는 9초 동안에 10.8(=1.2 x 9)kg 이 들어갔으므로 10.8 / 9 = 1.2 [kg/s]의 속도로 들어간 것이다.

만일 1 → 10기압까지 올리는 시간을 3초로 줄인다면 즉 3[기압/s]의 속도로 올리려면 3초 후에 공기통에는 12kg의 공기가 들어가 있을 것이고 이때 공기가 들어간 속도는 10.8 / 3 = 3.6 [kg/s]가 된다.

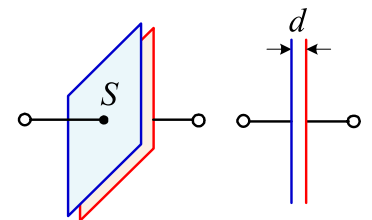
즉, 공기가 들어가는 속도는 압력을 높이는 속도에 비례한다.

10[기압]까지 압력을 올렸다가 외부에서 가해지는 압력을 예를들어 9[기압]으로 내리면 공기통 속의 압력이 더 높으므로 공기는 밖으로 나올 것이다. 콘덴서가 동작하는 원리도 공기통에 공기가 드나드는 원리와 같다.



평판 콘덴서의 구조와 정전용량

전기적으로 절연된 모든 도체 사이에는 정전용량이 존재한다. 기본적인 평판 콘덴서의 구조는 그림과 같이 얇은 도체판 두개를 마주 세워놓고 그 사이에 절연체(유전체)를 채운 것이다. 도체판의 면적을 S[m²], 두 도체간의 거리를 d[m]라고 하고 사이에 채워진 유전체의 유전율을 ε 이라고 하면 이 콘덴서의 정전용량은 극판의 넓이와 극판 사이에 채워진 유전체의 유전율에 비례하고, 극판 사이의 거리에 반비례해서 다음과 같이 계산된다.



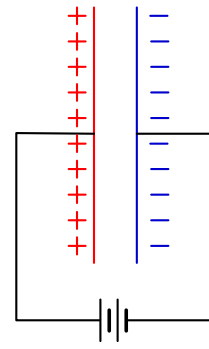
$$C = \frac{\epsilon S}{d} [F : Farad]$$

이러한 콘덴서에 그림과 같이 전압이 가해지면 자유전자들이 전압에 의해서 (+)극에서 (-)극으로 끌려가므로 (+)극에는 정공들이 남고, (-)극에는 같은 수의 전자들이 있게 되는데 이때 이동하는 전자의 수는 가해진 전압의 크기에 비례한다.

즉 인가되는 전압이 높아지면 극판 양쪽에 존재하는 정공과 전자의 수가 커진다. 이때 콘덴서에는 이동한 전자의 수 $\times 1.602 \times 10^{-19}[\text{C}]$ 의 전하가 충전된다. 공기통에서와 같이 콘덴서에 충전되는 전하량은 콘덴서의 **정전용량** $C[\text{F}]$ 와 가해진 **전압** $V[\text{V}]$ 에 비례해서 충전되는 전하량 $Q[\text{C}]$ 는 다음식으로 계산된다.

$$Q = CV [\text{C}]$$

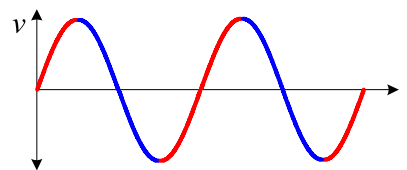
즉, 공기통에 들어가는 공기의 무게가 공기통의 체적과 공기를 불어넣는 압력에 비례하는 것과 같이, 콘덴서에 충전되는 전하량도 콘덴서의 **정전용량**과 거기에 인가된 **전압**의 크기에 비례한다.



콘덴서에 흐르는 전류

콘덴서에 직류전압이 가해지면 순간적으로 충전이 완료된 후에는 더 이상의 전류가 흐르지 않는다. 예를들어 100[V]의 직류전압이 인가되어 충전이 완료되면 콘덴서의 전압도 100[V]가 되어 전원과 콘덴서의 전압이 같아지므로 더 이상의 전류가 흐르지 못하는 것이다.

그러나 교류의 경우에는 전압의 크기가 계속해서 변하기 때문에 콘덴서에 교류전압이 가해지면 전류가 계속해서 흐른다. 전원전압이 증가해 갈 때는 콘덴서가 충전되었다가 최대치를 지나면 전원전압이 콘덴서에 충전되었던 전압보다 낮아지므로 콘덴서에 충전되었던 전하가 반대방향으로 흐르면서 방전된다. 그림에서 빨간 부분은 충전되는 부분이고 파란부분은 방전되는 부분이다.



1[F]의 콘덴서에 가해지는 전압을 가변 시켜서 0 → 10[V]까지 10초 동안에 올리면, 즉 1[V/s]의 속도로 올리면 10초 후에 이 콘덴서에는 $Q = CV = 1 \times 10 = 10[\text{C}]$ 의 전하가 충전된다. 이때 전하가 이동한 속도는 10초에 10[C]이 이동했으므로 전류는

$$\frac{10 [\text{C}]}{10 [\text{s}]} = 1 [\text{C/s}] = 1 [\text{A}]$$

만일 전압을 0→10V까지 올리는 시간을 2초로 줄이면 이번에는 10[C]의 전하가 2[s] 동안에 이동했으므로 이때 흐른 전류는

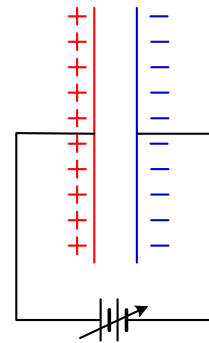
$$\frac{10 [\text{C}]}{2 [\text{s}]} = 5 [\text{C/s}] = 5 [\text{A}]$$

결국 콘덴서에 흐르는 전류는 얼마의 시간동안에 얼마의 전하가 이동했느냐 하는 것으로 결정되고, $Q = CV [\text{C}]$ 이므로

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCV}{dt} = C \frac{dV}{dt} [\text{A}]$$

로 되어 콘덴서에 흐르는 전류는 콘덴서 용량 $C[\text{F}]$ 와 콘덴서에 가해지는 전압의 시간에 대한 변화율 dV/dt 에 비례하는 것을 알 수 있다. 정전용량이 일정할 경우 콘덴서에 흐르는 전류는 전압의 시간에 대한 변화율 dV/dt 에 비례한다. 이는 마치 공기통에 공기가 들어가는 속도는 압력을 올리는 속도에 비례하는 것과 같다.

콘덴서에 흐르는 전류가 제한되는 이유는 콘덴서에는 그 정전용량과 가해지는 전압에 따라서 충전될 수 있는 전하가 정해져 있어서 더 이상의 전하가 이동할 수 없기 때문이다.

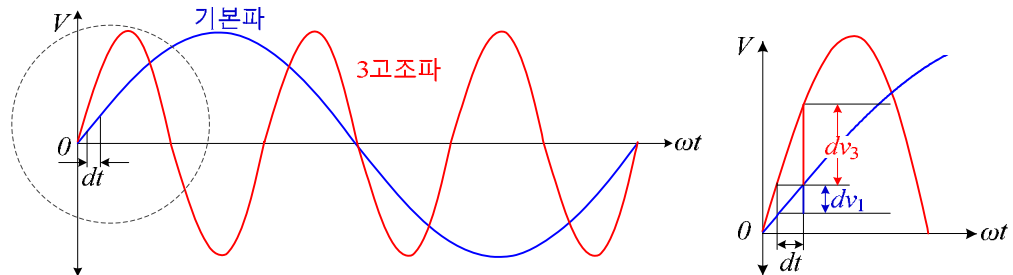


주파수가 콘덴서에 흐르는 전류에 주는 영향

콘덴서에 흐르는 전류는

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} [A]$$

이기 때문에 콘덴서에 같은 크기의 정현파 전압이 가해져도 주파수가 높을수록 주파수에 비례해서 더 큰 전류가 흐른다. 다음 왼쪽 그림은 최대치가 같은 기본파와 3고조파의 파형을 그린 것이고, 오른쪽 그림은 왼쪽 그림의 점선(원) 부분을 확대해서 그린 것이다.



오른쪽 그림에서 dt 시간동안 기본파 전압의 변화는 dv_1 이고, 3고조파 전압의 변화는 dv_3 이다. 그림에서 보는 바와 같이 dv_3 는 dv_1 의 3배가 되고 콘덴서에 흐르는 전류는

$$C \frac{dv_3}{dt} = 3 \times C \frac{dv_1}{dt}$$

이 되어 동일한 용량(C)의 콘덴서이면 3고조파 전류는 기본파 전류의 3배가 흐른다.

용량성 리액턴스

콘덴서에 $v = V_m \sin \omega t$ 의 교류전압이 인가될 때 흐르는 전류는 콘덴서 용량과 전압변화율에 비례해서

$$\begin{aligned} i &= C \frac{dv}{dt} = C \frac{d}{dt} V_m \sin \omega t \\ &= \omega C V_m \cos \omega t \\ &= \omega C V_m \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= \frac{V_m \sin(\omega t + 90^\circ)}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{v}{\frac{1}{\omega C}} \angle 90^\circ = \frac{jv}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{v}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{v}{Z_C} \end{aligned}$$

위식에서 $\sin(\omega t + 90^\circ)$ 를 삼각함수의 가법정리로 전개하면 $\cos \omega t$ 가 된다. 즉 $\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$ 이다.

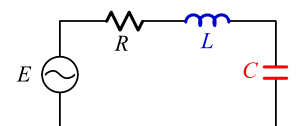
따라서 콘덴서의 용량성 리액턴스는 각속도 ω (주파수)와 정전용량 C에 반비례해서 다음과 같이 표시된다.

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C} [\Omega]$$

직렬공진

R L C가 그림과 같이 직렬로 접속되어 있는 회로의 임피던스는

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) [\Omega]$$



이 되는데 위식에서 유도성 리액턴스와 용량성 리액턴스의 절대값이 같으면, 즉 $|\omega L| = |1/\omega C|$ 이 되면 X_L 과 X_C 는 상쇄되어 없어지고 회로에는 저항 R만 남은 결과가 되어, 이때 회로에는 최대의 전류가 흐르게 되는데 이렇게 되는 것을 **직렬공진**이라고 한다.